

# 置換積分

置き換えをして、積分が可能な形にしてから積分する

$$(例) \int f(g(x))g'(x)dx \cdots \textcircled{1}$$

$$t = g(x) \text{ とおくと, } \frac{dt}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow dt = g'(x)dx$$

$$\text{よって, } \textcircled{1} : \int f(t)dt \quad \boxed{\leftarrow \text{積分可能}}$$

$$\{(f(x))^{n+1}\}' = (n+1)\{f(x)\}^n f'(x) \text{ より,}$$

$$\int f'(x)\{f(x)\}^n dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$$

$t = f(x)$  と置換しても出来るが、これは公式として覚えておくこと。

$$\text{その他, 代表的なもの: } \int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

・代表的な置換法

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a \sin \theta \quad (a \cos \theta \text{ でも可})$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{x^2 + a^2} \Rightarrow x = a \tan \theta$$

$$\textcircled{3} \quad (\sin \theta \text{ の式}) \cdot \cos \theta \Rightarrow t = \sin \theta$$

$$\textcircled{4} \quad (\cos \theta \text{ の式}) \cdot \sin \theta \Rightarrow t = \cos \theta$$

4

次の不定積分を求めよ。

- |  |   |
|--|---|
| ① $\int x\sqrt{x^2+2} dx$ [琉球大]          | ② $\int (x+x^3)\sqrt{1+x^2} dx$           |
| ③ $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ [東北学院大] | ④ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ |
| ⑤ $\int \frac{1}{e^x+1} dx$ [長岡技術科学大]    | ⑥ $\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$ [信州大]   |
| ⑦ $\int \sin^3 x \cos x dx$ [東海大]        | ⑧ $\int \cos^3 x dx$                      |
| ⑨ $\int \sin^5 x dx$                     | ⑩ $\int \tan^3 x dx$                      |

《類題4》 次の不定積分を求めよ。

- (1)  $\int 2x(x^2+2)^2 dx$  [東京電機大]    (2)  $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$     (3)  $\int (2x+1)\sqrt{x+2} dx$     …①
- (4)  $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$     (5)  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$     …②③
- (6)  $\int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx$  [関西大]    (7)  $\int xe^{3x^2} dx$  [山形大, 東京都市大]    …④⑤
- (8)  $\int \frac{\log x}{x(\log x-1)^2} dx$     (9)  $\int x \log(x^2+1) dx$  [岡山理科大]    …⑥
- (10)  $\int \cos^4 x \sin x dx$     (11)  $\int \sin^3 x dx$     (12)  $\int \frac{\sin x \cos x}{2+\cos x} dx$  [関西学院大]
- (13)  $\int \frac{1}{\sin x} dx$     (14)  $\int \frac{1}{\cos x} dx$     …⑦~⑩