

置換積分

置き換えをして、積分が可能な形にしてから積分する

$$(例) \int f(g(x))g'(x)dx \cdots \textcircled{1}$$

$$t = g(x) \text{ とおくと, } \frac{dt}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow dt = g'(x)dx$$

$$\text{よって, } \textcircled{1} : \int f(t)dt \quad \boxed{\leftarrow \text{積分可能}}$$

$$\{(f(x))^{n+1}\}' = (n+1)\{f(x)\}^n f'(x) \text{ より,}$$

$$\int f'(x)\{f(x)\}^n dx = \frac{1}{n+1}\{f(x)\}^{n+1} + C$$

$t = f(x)$ と置換しても出来るが、これは公式として覚えておくこと。

$$\text{その他, 代表的なもの: } \int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

・代表的な置換法

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a \sin \theta \quad (a \cos \theta \text{ でも可})$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{x^2 + a^2} \Rightarrow x = a \tan \theta$$

$$\textcircled{3} \quad (\sin \theta \text{ の式}) \cdot \cos \theta \Rightarrow t = \sin \theta$$

$$\textcircled{4} \quad (\cos \theta \text{ の式}) \cdot \sin \theta \Rightarrow t = \cos \theta$$

4

次の不定積分を求めよ。

① $\int x\sqrt{x^2+2} dx$ [琉球大]

② $\int (x+x^3)\sqrt{1+x^2} dx$

③ $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ [東北学院大]

④ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

⑤ $\int \frac{1}{e^x+1} dx$ [長岡技術科学大]

⑥ $\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$ [信州大]

⑦ $\int \sin^3 x \cos x dx$ [東海大]

⑧ $\int \cos^3 x dx$

⑨ $\int \sin^5 x dx$

⑩ $\int \tan^3 x dx$

《類題4》 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 2x(x^2+2)^2 dx$ [東京電機大] (2) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ (3) $\int (2x+1)\sqrt{x+2} dx$ …①

(4) $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$ (5) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ …②③

(6) $\int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx$ [関西大] (7) $\int xe^{3x^2} dx$ [山形大, 東京都市大] …④⑤

(8) $\int \frac{\log x}{x(\log x-1)^2} dx$ (9) $\int x \log(x^2+1) dx$ [岡山理科大] …⑥

(10) $\int \cos^4 x \sin x dx$ (11) $\int \sin^3 x dx$ (12) $\int \frac{\sin x \cos x}{2+\cos x} dx$ [関西学院大]

(13) $\int \frac{1}{\sin x} dx$ (14) $\int \frac{1}{\cos x} dx$ …⑦～⑩